APRIL/MAY 2025

FMA51 — ABSTRACT ALGEBRA

Time : Three hours Maximum : 75 marks

SECTION A — (10 × 2 = 20 marks)

Answer ALL questions.

1. Define abelian and non – abelian group.

   அபீலியன் குலம் மற்றும் அபீலியனில்லா குலத்தை வரையறு.

2. Define Left and right identity of a group.

   இடது மற்றும் வலது முற்றொருமையை வரையறு.

3. Define the centre H of a group G.

   குலம் G யில் H மையத்தை வரையறு.



4. Define kernel of f.

   f -ன் மைய உருவை வரையறு.

5. Define Permutations.

   வரிசைமாற்றத்தினை வரையறு.

6. Define symmetric group.

சமச்சீர் குலத்தை வரையறு.

7. Define division ring.

வகுத்தல் வளையத்தை வரையறு.

8. Define Principal Ideal Domain.

முதன்மை புனைவு அரங்கத்தினை வரையறு.

9. Define prime ideal.

முதன்மை புனைவை வரையறு.

10. Write down the four stages the construction of the field of quotient F.

ஈவு களம் F உருவாக்குவதற்கான நான்கு நிலைகளை எழுதுங்கள்.

SECTION B — ($5 \times 5 = 25$ marks)

Answer ALL questions.

11. (a) Let G be a group $a, b \in G$, then show that $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ and $(a^{-1})^{-1} = a$.

குலம் G-ல் a, b உள்ளது எனில் $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ மற்றும் $(a^{-1})^{-1} = a$ எனக் காட்டுக.

Or



R மற்றும் R' என்பவை வளையங்கள் மற்றும் $f : R \to R'$ தொடர் அமைவியம் உடையது எனில்

(அ) S என்பது R'-ல் உள்வளையமாக இருக்கும் போது $f(S)$ என்பது R' உள்வளையமாக இருக்கும் எனவும்

(ஆ) S என்பது R'-ல் புனைவு உடையது எனில் $f(S)$ என்பது $f(R)$ புனைவு உடையது எனக் காட்டுக.

20. Show that it F' is any other field containing D then F' contains a subfield isomorphic to F.

F' ஐக் கொண்ட D என்பது ஏதேனும் ஒரு புலம் என்றால் F' சம அளவு உட்புலத்தைக் கொண்டுள்ளது எனக் காட்டுக.

G என்பது ஒரு வெற்றல்லாத ஈருறுப்பு செயல்பாட்டின் தொகுப்பாக வரையறுத்து G இல் அதன் சமன்பாடுகள் $ax = b$ மற்றும் $ya = b$ மீது இல் x மற்றும் y க்கு தனித்துவமான தீர்வுகளைக் கொண்டுள்ளபோது G ஒரு குலம் எனக் காட்டு.

17. State and prove fundamental theorem of homomorphism.

தொடர் அமைவியத்தின் அடிப்படை தேற்றத்தை எழுதி நிறுவுக.

18. Show that any cycle group of order n is isomorphic to $(Z, \oplus)$.

n வரிசையுடைய எந்த ஒரு சுழற்சிக் குலம் $(Z, \oplus)$க்கு சம அளவுடையது எனக் காட்டுக.

19. Let R and R' be rings and $f : R \to R'$ be a homomorphism then show that

(a) If S is a subring of R, then $f(S)$ is a subring of R'. In particular $f(S)$ is a subring of R'.

(b) If S is an ideal of R, then $f(S)$ is an ideal of $f(R)$.



(b) Show that A is a non-empty subset H of a group G if and only if $a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$.

A என்பது G குழுவின் ஒரு வெற்றல்லாத உட்குலம் H என்பது G இன் துணைக்குழுவாக இருக்கும் அவற்றில் இருந்து மட்டுமே $a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$ இருக்கும் எனக் காட்டுக.

12. (a) Let H and K are subgroup of a finite group G such that $|H| > \sqrt{|G|}$ and $|K| > \sqrt{|G|}$ then show that $H \cap K \neq e$.

H மற்றும் K என்பவை G-ல் முடிவுறு உட்குலம் மேலும் $|H| > \sqrt{|G|}$ மற்றும் $|K| > \sqrt{|G|}$ எனில் $H \cap K \neq e$ எனக் காட்டுக.

Or

(b) Show that every subgroup of an abelian group is a normal subgroup.

அபீலியன் குலத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு உட்குலமும் நேரிய உட்குலம் எனக் காட்டுக.

13. (a) Let G be any group and let $a \in G$ then $\phi_a : G \to G$ defined by $\phi_a(xy) = axa^{-1}$ then show that ϕ_a is an automorphism.

G என்பது ஒரு குலம், $a \in G$ மேலும் $\phi_a : G \to G$ ல் $\phi_a(xy) = axa^{-1}$ என வரையறுக்கப்பட்டால் ϕ_a தன் உருவாக்கமுடையது எனக் காட்டுக.

Or

(b) Show that the symmetric group S_n contains $n!$ elements.

S_n சமச்சீர் குலம் $n!$ உறுப்புகள் உடையது என காட்டுக.

14. (a) Show that a non-empty subset S of a ring R is a subring iff $a, b \in S \Rightarrow a - b \in S$ and $ab \in S$.

R என்ற வெற்றல்லாத குலமானது S என்ற உட்குலத்தை கொண்டுள்ளது எனில் $a, b \in S \Rightarrow a - b \in S$ மற்றும் $ab \in S$ உள்ளது எனக் காட்டுக.

Or

(b) Let F be any field then show that the only ideals of F are $\{0\}$ and F.

F ஒரு களம் எனில் $\{0\}$ மற்றும் F என்ற புனைவு மட்டும் F-ல் இருக்கும் எனக் காட்டுக.

15. (a) Let R be the ring of all real valued continuous function on $[0,1]$ then show that M is maximal in R.

R ஆனது $[0,1]$ இல் உள்ள அனைத்து உண்மையான மதிப்புக்கும் தொடர்ச்சியான சார்புடைய வளையமாக இருக்கிறது எனில் R இல் M அதிகபட்சமாக இருக்கும் எனக் காட்டுக.

Or

(b) Show that the map $f : D \to F$ given by $f(a) = \frac{a}{1}$ is an isomorphic of D onto $f(D)$.



$f : D \to F$ என்ற கோப்புக்கு $f(a) = \frac{a}{1}$ என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது எனில் இது சம அளவுடையது எனக் காட்டுக.

SECTION C — (3 × 10 = 30 marks)

Answer any THREE questions.

16. Let G be a non-empty set with as associative binary operation defined on it such that the equations $ax = b$ and $ya = b$ has unique solutions for x and y in G then show that G is a group.